Sisteme de Prelucrare Grafică

Curs nr. 3

Cap 2. TRANSFORMĂRI TRIDIMENSIONALE 3D

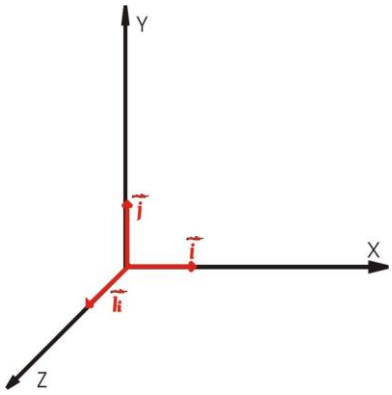
2.1.Transformări Geometrice

Transformările geometrice 3D cuprind translaţia, scalarea, rotaţia, oglindirea, foarfecarea şi (în plus faţă de 2d) proiecţia obiectelor 3D.
În mod analog transformărilor 2D, care se reprezintă în coordonate omogene prin matrice 3x3, transformările 3D pot fi reprezentate prin matrice 4x4.

coordonate careteziene → coordonate omogene
(x,y,z) → (x_w, y_w, z_w, w)

w – parametru real si $x = \frac{x_w}{w}$, $y = \frac{y_w}{w}$, $z = \frac{z_w}{w}$

Considerând un sistem de referinţe orientat dreapta $(\vec{i} x \vec{j} > \vec{k})$, şi vectori coloană, matricea de transformare, în forma generală, este de forma urmatoare:



$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & | & p \\ d & e & f & | & q \\ g & h & i & | & r \\ - & - & - & - & - \\ l & m & n & | & s \end{bmatrix}$$

Matricea poate fi impărţită astfel:

$$M = \begin{bmatrix} 3x3 & | & 3x1 \\ - & - & - \\ 1x3 & | & 1x1 \end{bmatrix}$$

- 3x3 – include transformările de scalare, oglindire, foarfecare, rotaţie
- 3x1 – transformarea de translaţie
- 1x3 – transformarea de perspectivă
- 1x1 – transformarea de scalare generală

a)Translaţia

$$\vec{v} = t_x \cdot \vec{i} + t_y \cdot \vec{j} + t_z \cdot \vec{k}$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix},\ P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad => \quad P' = S(t_x, t_y, t_z) \cdot P \qquad (1)$$

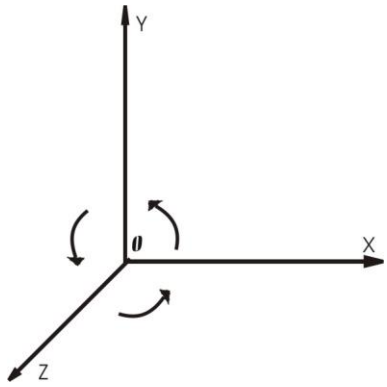
$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

b) <u>Scalarea faţa de origine</u>

s_k, s_y, s_z - vectori de scalare => $\boxed{P' = T(t_x, t_y, t_z) \cdot P}$ (3)

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & t_y \\ 0 & 0 & s_z & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

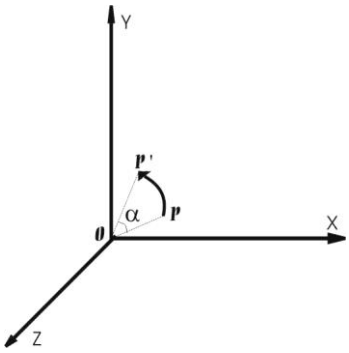
c) <u>Rotaţia faţa de axele sistemului de coordonate</u>



Sistemul de coordonate este orientat drept şi deci sensul pozitiv de rotaţie e dat de regula burghiului drept; de exemplu rotind axa Ox spre axa Oy, in jurul lui Oz, burghiul trebuia să se deplaseze în sensul pozitiv al axei Oz - ($\vec{i} x \vec{j} \le \vec{k}$)

1) – <u>rotaţia în jurul axei Oz</u>

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z' = z \end{array} \right\}$$ - ca la 2D

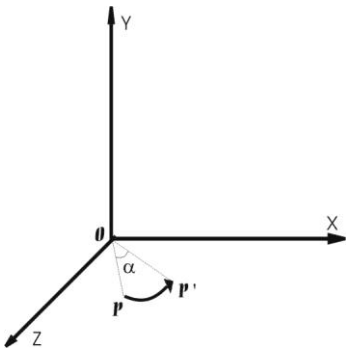


$$\Rightarrow R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$\boxed{P' = R_z(\alpha) \cdot P} \quad (6)$$

1) – <u>rotaţia în jurul axei Oy</u>

$$\begin{cases} z' = z\cos\alpha - x\sin\alpha \\ y' = y \\ x' = z\sin\alpha + x\cos\alpha \end{cases}$$



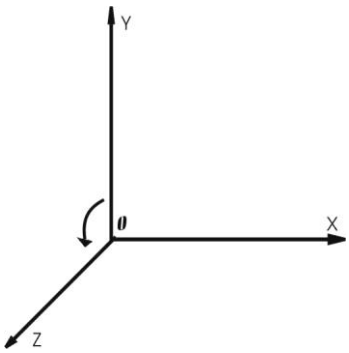
$$\boxed{P' = R_y(\alpha) \cdot P} \qquad (7)$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

2) – rotaţia in jurul axei Ox

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases}$$



$$\Rightarrow P' = R_x(\alpha) \cdot P \qquad (9)$$

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Obs. Toate matricile de transformare anterioare au inverse şi avem următoarele relaţii:

$$[T(t_x,t_y,t_z)]^{-1} = T(-t_x,-t_y,-t_z) \qquad (11)$$

$$[S(s_x,s_y,s_z)]^{-1} = S(1/s_x,1/s_y,1/s_z)$$

$$[R_x(\alpha)]^{-1} = R_x(-\alpha)$$

$$[R_y(\alpha)]^{-1} = R_y(-\alpha)$$

$$[R_z(\alpha)]^{-1} = R_z(-\alpha)$$

d) Oglindirea faţă de un plan al sistemului de coordonate

1) – faţă de planul xy – se inversează doar coordonata z

$$P' = O_{xy} \cdot P \qquad O_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

2) – faţă de planul yz – se inversează coordonata x

$$O_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

3) – fată de planul xz: $O_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (14)

2.2. Transformări complexe

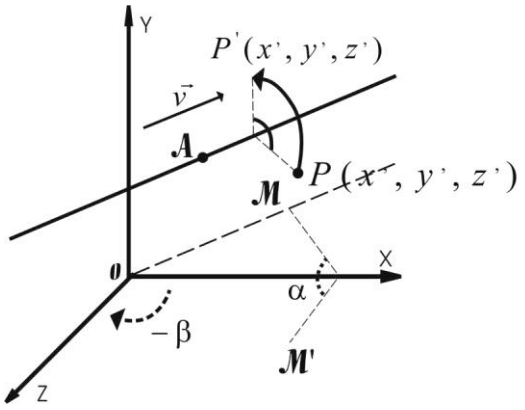
Transformările successive aplicate unui obiect 3D se pot combina intr-o singură transformare. De exemplu dacă ordinea de aplicare a matricilor elementare este $T_1, T_2, ...T_n$ atunci transformarea compusă se scrie:

$$P' = T_n \cdot T_{n-1} ... T_2 \cdot T_1 \cdot P \qquad (15)$$

unde $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$, $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$

a)<u>Rotatia unui punct in jurul unei drepte oarecare</u>

Considerăm cazul în care dreapta se specifică printr-un punct A(x_0, y_0, z_0) si un vector directie $\vec{v} = a \cdot \vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.



Punctul P se roteste cu un unghi θ in jurul dreptei.

$P' = M \cdot P$ unde matricea transformării M se poate compune din urmatoarele transformări elementare.

-1) –translaţia dreptei astfel încât punctul A să ajungă in origine

$T(-x_0, -y_0, -z_0)$

-2)- rotaţia dreptei în jurul axei x pană ce ajunge în planul XoZ (o rotim cu unghiul α) => $R_x(\alpha)$

-3)- rotaţia în jurul lui y pană ce ajunge peste axa Z

$R_y(-\beta)$ (Obs. β nu e rotaţie în sens trigonometric)

-4)-rotaţie a punctului dat cu unghiul θ => $R_z(\theta)$

-5)-rotaţia inversă de la punctual 3 => $R_y(+\beta)$

-6)-rotatia inverse de la punctual 2 => $R_x(-\alpha)$

-7)-translaţia inversă de la punctul 1 $T(x_0, y_0, z_0)$

=> $M = T(x_0, y_0, z_0) \cdot R_x(-\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(\theta) \cdot R_y(-\beta) \cdot R_x(\alpha) \cdot T(-x_0, -y_0, -z_0)$

A_z = alinierea dreptei cu axa oz (1b)

Pentru a determina unghiurile de rotaţie în jurul axei Ox,α si respectiv Oz, β , procedăm astfel:

- dreapta specificată poate fi scrisă parametric

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \\ z = z_0 + c \cdot t \end{cases} \quad (17)$$

După translaţia punctului (x_0, y_0, z_0) în origine, considerăm un punct de pe dreapta M, corespunzător lui t=1, care se roteşte cu unghiul α faţa de Ox astfel încat dreapta sa ajungă în planul xOz.

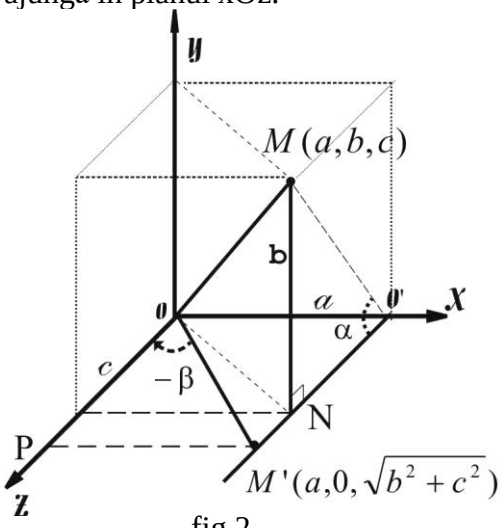


fig 2

$$MO' = \sqrt{MO^2 - OO'^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - a^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$M'O' = MO'$$

$$\cos\alpha = \frac{O'N}{O'M} \Rightarrow \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}} \qquad (18)$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}} \qquad (19)$$

Obs. Se va lua unghiul cu semn negatv $-\beta$, deoarece rotaţia nu e in sens trigonometric.

Dacă dreapta se dă prin două puncte $A(x_0, y_0, z_0)$ si $B(x_1, y_1, z_1)$ se scrie:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)\cdot t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)\cdot t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)\cdot t \end{cases} \qquad (20)$$

şi deci $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$, $c = z_1 - z_0$

b) <u>Oglindirea faţă de un plan oarecare</u>

Considerăm planul de oglindire specificat printr-un punct $A(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorul normală la plan $\vec{n}$. O procedură de obţinere a transformării de oglindire poate fi următoarea:

1)- translaţie astfel încat planul să treaca prin origine $T(-x_0, -y_0, -z_0)$

2)-alinierea vectorului normală la plan $\vec{n}$ cu axa Oz, pozitiv.

$A(\vec{n}, z)$ - doua rotaţii

3)-oglindirea faţă de planul xOy

$$O_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4)-transformarea inversă de la punctul 2

5)-translaţia inversă de la punctul 1 $T(x_0, y_0, z_0)$

=> matricea transformării este:

$$\boxed{M = T(x_0, y_0, z_0) \cdot A^{-1}(\vec{n}, z) \cdot O_z \cdot A(\vec{n}, z) \cdot T(-x_0, -y_0, -z_0)} \quad (21)$$

2.3.<u>Proiecţii</u>

Def. Proiecţia constituie o transformare dintr-un spaţiu R^n într-un spaţiu R^p unde p<n. În grafică n=3, p=2. Proiecţia unui obiect 3D într-un <u>plan de</u> proiecţie e determinată de multimea punctelor de intersecţie dintre drepte care pleacă dintr-un punct fix numit <u>centru de proiecţie</u> şi planul de proiecţie, fiecare dreaptă trecând printr-un punct al obiectului 3D.

În grafică proiecţia se face întotdeauna într-un plan, iar proiectorii sunt drepte. Există şi proiecţii enplane(de ex. în cartografie) unde şi suprafeţele de proiectare şi proiectorii sunt curbe.

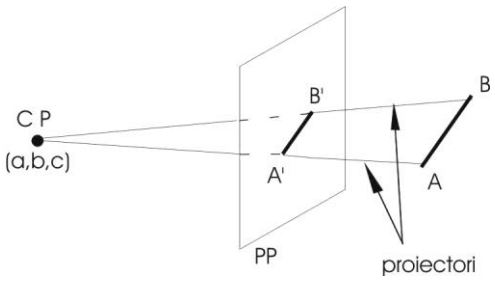
În funcţie de poziţia centrului de proiectare (CP) fată de planul de proiecţie, proiecţiile se clasifică în:

a) şi proiectorii sunt curbe.

În funcţie de poziţia centrului de proiectare (CP) faţă de planul de proiecţie proiecţiile se clasifică în:

a) <u>proiecţie perspectivă</u> – CP se află la distantă finită fată de planul de proiecţie
b) <u>proiecţie paralelă</u> – CP se află la distanţa infinită fată de planul de proiecţie

a) <u>Proiecţia perspectivă</u> – se specifică printr-un centru de proiecţie şi un plan de proiecţie.

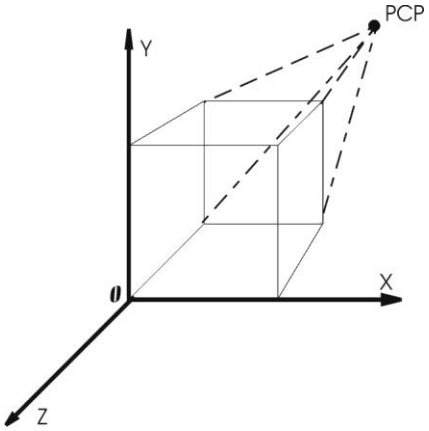


CP – centru de proiecţie
PP – plan de proiecţie
$A^{'}B^{'}$ - proiecţia segmentului AB

fig 3

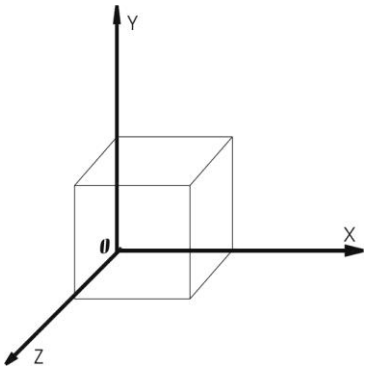
Proiecţia perspectivă creează imagini asemănătoare celor obţinute cu un aparat de fotografiat. Se caracterizează prin:

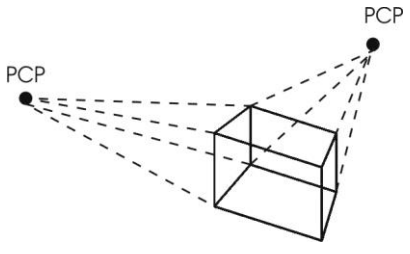
- efectul de micşorare (perspective foreshortening) – dimensiunea obiectului proiectat este invers proportională cu distanţa de la CP la obiect (obiectele mai departate apar mai mici)
- proiecţiile liniilor paralele, dar care nu sunt paralele cu PP converg într-un punct din PP numit punct de convergenţă (vanishing point).
  Dacă liniile proiectate sunt paralele cu una din axele sistemului de coordonate, punctul de convergenţă se numeşte punct de convergentă principal PCP. In *figura 4* este analizată proiecţia în planul z=0 (xOy) a unui cub cu muchiile paralele cu axele de coordonate.



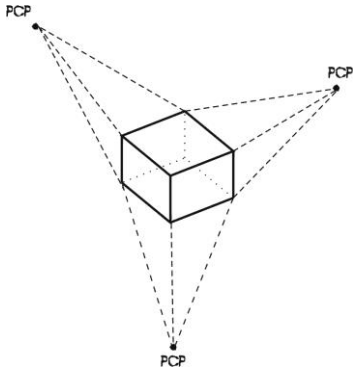
Tipuri de proiecţii perspectivă:

1) cu un PCP – Planul de proiecţie intersectează o axa a sist. De coordonate de ex: planul z=0 din fig. 4
   (este paralel cu un plan xOy sau xOz sau yOz)
2) cu două puncte de convergentă principale – planul de proiecţie intersectează doua axe (este paralel cu o axa)

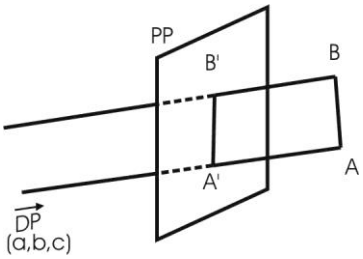




3) cu trei PCP – planul de proiecţie intersectează toate axele de coordonate



c) <u>Proiecţia paralelă</u> – este specificată printr-o direcţie de proiecţie DP şi un plan de proiecţie



DP – direcţie de proiecţie

Proiecţia paralelă oferă o imagine mai putin realistă, fiind utilizată pentru o reprezentare exactă a formei si dimensiunii obiectului. Această reprezentare păstrează paralelismul liniilor, iar unghiurile se conservă doar pentru feţele obiectului paralel cu PP.

Clasificare proiecţii